Razmotrićemo tri slučaja. 1) $\lambda > 0$. Tada je $X = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$ proizvoljno rješenje jednačine (15). Zamjenom graničnih uslova (16) dobijamo da je $C_1 = C_2 = 0$, tj. $X \equiv 0$. 2) Za $\lambda = 0$ imamo da je $X = C_1 + C_2 x$. I ovdje zamjena početnih uslova daje $C_1 = C_2 = 0$, tj. $X \equiv 0$. 3) $\lambda < 0$. Sada je $X = C_1 \sin\sqrt{-\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{-\lambda}x$. Iz graničnog uslova $X(0) = 0$ dobijamo da je $C_2 = 0$. Iz graničnog uslova $X(l) = 0$ dobijamo da je $C_1 \sin\sqrt{-\lambda}l = 0$. Konstanta C_1 može biti različita od nule, ako je $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, tj. $\sqrt{-\lambda}l = \pi k$, $k=1,2,3,\dots$. Slijedi, $\lambda_k = -\dfrac{\pi^2 k^2}{l^2}$ su sopstvene vrijednosti, a pripadajuća netrivijalna rješenje su supstvene funkcije $X_k(x) = \sin\dfrac{\pi k x}{l}$. Vrijednosti λ_k za $k = 0, -1, -2, -3\dots$ se ne uzimaju u razmatranje, jer one odgovaraju ili trivijalnom rješenje $X_0(x) = 0$, ili linearno zavisnom rješenju $X_{-k}(x) = -X_k(x)$.

Rješenje jednačine (14) za $\lambda = \lambda_k$ ima oblik

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin\frac{\pi k a t}{l},$$

gdje su A_k i B_k koeficijenti koje ćemo, nešto kasnije, odrediti.

Na ovaj način, funkcije

$$u_k = T_k(t) X_k(x) = \left(A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \right) \sin\frac{\pi k x}{l}$$

su partikularna rješenja jednačine (10) koja zadovoljavaju granične uslove (11) za proizvoljne konstante A_k i B_k.

Saglasno svojstvu superpozicije rješenja homogene linearne PDJ imamo da će red

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \right) \sin\frac{\pi k x}{l} \tag{17}$$

biti rješenje jednačine (10), ako red ravnomjerno konvergira (tada se red može diferencirati po t i x). Funkcija $u(t,x)$, koja je zbir reda (17), zadovoljava granične uslove (11).

Odredimo koeficijente A_k i B_k tako da rješenje (17) zadovoljava početne uslove (12). Diferencirajmo red (17) po t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k a}{l} \left(-A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} + B_k \cos\frac{\pi k a t}{l} \right) \sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{18}$$

Zamijenimo $t = 0$ u (17) i (18). Tada, saglasno početnim uslovima (12), imamo da je

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k x}{l},$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k a}{l} B_k \sin\frac{\pi k x}{l}.$$

Ovi redovi predstavljaju razlaganje funkcija $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ u Furijeove redove po sinusima. Koeficijenti razlaganja se izračunavaju po formulama: